2013-2014上学期-计算机学院

离散数学（A卷）

一．求下列公式的主析取范式和主合取范式：(10’)

P→(Q→R)

解：主合取范式：П(6) ⇔ᄀP∨ᄀQ∨R

主析取范式：Σ(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7) ⇔ (ᄀP∧ᄀQ∧ᄀR) ∨(ᄀP∧ᄀQ∧R) ∨ (ᄀP∧Q∧ᄀR) ∨ (ᄀP∧Q∧R) ∨ (P∧ᄀQ∧ᄀR) ∨ (P∧ᄀQ∧R) ∨ (P∧Q∧R)

二．证明下列结论是前提的有效结论（写出证明序列）：(7+8=15’)

（1）前提：P∧Q →R，ᄀS→P

结论：ᄀR →ᄀQ∨S

证明：1) ᄀR 附加前提

2) Q 附加前提

3) P∧Q →R 前提

4) ᄀR →ᄀ(P∧Q) 3)，T规则

5) ᄀ(P∧Q) 1),4)，MP规则

6) ᄀP∨ᄀQ 5)，T规则

7) ᄀP 2),6)，析取三段论

8) ᄀS→P 前提

9) S 7),8)，拒取式

（2）前提：∀x(P(x) →ᄀR(x))，ᄀ∃x(G(x) ∧ᄀR(x))

结论：ᄀ∃x(P(x)∧G(x))

证明：反证法：

1) ∃x(P(x)∧G(x)) 否定前提

2) P(a)∧G(a) 1), ES规则

3) ∀x(P(x) →ᄀR(x)) 前提

4) ᄀ∃x(G(x) ∧ᄀR(x)) 前提

5) ∀x(ᄀG(x) ∨R(x)) 4），T规则

6) P(a) →ᄀR(a) 3), US规则

7) ᄀG(a) ∨R(a) 5), US规则

8) P(a) 2), 化简规则

9) ᄀR(a) 6),8), MP规则

10) G(a) 2), 化简规则

11) R(a) 7),10)，析取三段论

12) F 9)11)，合取

三．R1是集合S上的二元关系，R2是T上的二元关系，定义S×T上的关系R3⊆(S×T)2：<s1, t1> R3<s2, t2>，iff， s1R1s2∧t1R2t2，证明下列各题：(7+7=14’)

(1) 若R1、R2为等价关系，则R3为等价关系；

证明：**R3为自反的：**对任意<s, t>∈S×T，因为R1、R2为等价关系，R1、R2具有自反性，则，sR1s∧tR2t，即<s, t> R3<s, t>，R3为自反的；

**R3为对称的：**若<s1, t1> R3<s2, t2>，则s1R1s2∧t1R2t2，因为R1、R2为等价关系，R1、R2具有对称性，则有s2R1s1∧t2R2t1，即<s2, t2> R3<s1, t1>，则R3为对称的；

**R3为传递的：**若<s1, t1> R3<s2, t2>，若<s2, t2> R3<s3, t3>，则s1R1s2∧t1R2t2，且s2R1s3∧t2R2t3，因为R1、R2为等价关系，R1、R2具有传递性，所以s1R1s3∧t1R2t3，即<s1, t1> R3<s3, t3>，则R3为传递的；

综上，若R1、R2为等价关系，则R3为等价关系；

(2) 若R1、R2为偏序关系，则R3为偏序关系；

证明：若R1、R2为偏序关系，R1、R2为自反且传递关系，R3也具有自反性、传递性（证明同（1））；

**R3为反对称的：**若<s1, t1> R3<s2, t2>，且<s2, t2> R3<s1, t1>，则s1R1s2∧t1R2t2，且s2R1s1∧t2R2t1，因为R1、R2为偏序关系，R1、R2具有反对称性，则s1=s2∧t1=t2，则<s1, t1> =<s2, t2>，所以R3为反对称的。所以若R1,R2为偏序关系,R3为偏序关系。

四．设集合X={1, 2, 3}，Y={a, b, c}，定义f∈YX，其中 f(1)=f(2)=a，f(3)=b，定义函数g: Y→ρ(X)，g(y) = f-1 ( {y} ) （说明：f-1 ( {y} )为集合{ y }在函数f下的逆像），完成下列各题：(4+6+6=16’)

(1) 求函数g的值域ran(g)；

解：ran(g)={ {1, 2}, {3}, Ø}.

(2) 分别说明f、g是否为单射、满射、双射；

解：f不是单射、满射、双射；

g是单射，不是满射、双射。

(3) 证明：∀B⊆Y，f ( f-1(B) ) ⊆B，并说明在什么条件下，f ( f-1(B) ) = B.

解：∀y∈f ( f-1(B) )，存在x∈f-1(B) ，且f(x)=y，因为x∈f-1(B)，则f(x) ∈B，即y∈B. 证毕

当f为满射时，f ( f-1(B) ) = B.

五．设<G, \*>是群，完成下列各题：(4+4+4=12’)

(1) 设元素x∈G，且x = x-1，求元素x的阶。

解：若x为单位元e，也满足条件，x的阶可为1.

又若x≠e，因x = x-1，则x\*x= x \* x-1 =e，即x2=e，则x的阶为2.

(2) 证明：在偶数阶群中，阶为2的元素的个数一定是奇数。

证明：对于任意的阶为k（k>2）的元素a，因为|a|=|a-1|，且a≠a-1（若a≠a-1，则a的阶为2），所以阶为k的元素总是成对出现，即a和a-1，则阶大于2的元素个数为偶数，有单位元e是阶为1的唯一元素，则偶数阶群中阶为2的元素个数一定是奇数。

(3) 设元素a，b∈G，且b\*a\*b-1 = a2，其中a不是单位元，b的阶为2，求a的阶。

解：|b|=2，b\*b=e，则b=b-1；因为b\*a\*b-1 = a2，所以b= a2\*b\*a-1. 则

b\*b =( a2\*b\*a-1)\*( a2\*b\*a-1)

=a2\*(b\*a \*b)\*a-1= a2\*(b\*a \*b-1)\*a-1

= a2\* a2\*a-1= a3=e，

则a的阶为3.

六．设<G, \*, eG>和<H, · , eH>是两个群，h是群G到H的同态，完成下列各题：(6+6+3=15’)

（1）证明：如果A是G的子群，则h(A)是H的子群；

证明：i) 因A是G的子群，eG∈A，h是群同态，则eH =h(eG) ∈h(A)，h(A)非空；

ii) 对任意x，y∈h(A)，存在a，b∈A，使得h(a)=x, h(b)=y, 则

x\*y-1=h(a)\*(h(b))-1=h(a)\*h(b-1)=h(a\*b-1),

因A是G的子群，a\*b-1∈A，则h(a\*b-1) ∈h(A)，即x\*y-1∈h(A)，所以h(A)是H的子群。

（2）证明：如果G和H都是有限群，a∈G，则h(a)的阶是|G|和|H|的公因子；

证：设|a|=p, 则p整除|G|，且(h(a))p=h(ap)=h(eG)=eH, 所以|h(a)|整除p，所以|h(a)|整除|G|，同时h(a) ∈H，|h(a)|整除|H|，所以h(a)的阶是|G|和|H|的公因子。

（3）<N5, +5>到<N6, +6>上共有多少个同态？（利用（2）的结果。）

证：对任意n∈N5, 同态h，由上题结果h(n)的阶是5和6的公因子，则|h(n)|=1, 阶为1的元素仅有单位元0，则h: n→0。<N5, +5>到<N6, +6>仅有一个同态，n∈N5, h(n)=0.

七．设G(n, m)是简单无向图，其顶点数n≥11，证明：*G*和(*G*的补图)至少有一个**不是**平面图。(10’)

证：反证法，假设G(n, m)和均为简单平面图，则由欧拉公式：

, 则,则

(n-11)(n+2)+2≥0，与n≥11矛盾。

八．简单无向图G有n个顶点，m条边，各顶点度数均为3，且2n=m+3，试画出满足条件的所有**不**同构的图G.（要求给出解题过程）(8’)

解：3n=2m, 又2n=m+3, 则n=6, m=9.